Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Aprile 1956 - Serie IV, vol. XXXIV, n. 2 (pagg. 65-84)

C. F. MANARA

# LA RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DI QUINTO GRADO MEDIANTE FUNZIONI ELLITTICHE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

# PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da F. Enriques nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica sopratutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

---

**Il secondo numero (Aprile 1956) della trentaquattreesima annata consta di 64 pagine e contiene, oltre le Questioni, i seguenti articoli:**

C. F. Manara - *La risoluzione dell' equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche.*

U. Cassina - *Elementi della teoria degli insiemi - II. Insiemi connessi irriducibili.*

L. Tenca - *Sul luogo dove nacque Evangelista Torricelli.*

G. Pozzolo Ferraris - *Applicazione alle quadriche del principio di Cavalieri sui volumi.*

---

**Abbonamento 1956 : Italia L. 900 — - Estero L. 1800 —.**

**Il *Periodico* si pubblica in 5 fascicoli annuali.**

---

L' importo dell' abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli

---

**Le annate complete 1924, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52, 53, 54 e 55 dell'attuale serie del**

## PERIODICO DI MATEMATICHE

**sono in vendita al prezzo di L. 1600 l'annata, per l'Italia, L. 2400 per l'estero.**

Esistono fascicoli separati dei 20 volumi al prezzo di:
L. 600 al fascicolo per l'Italia — L. 1200 per l'estero.

# La risoluzione dell'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche

§ **1.** - Scopo di questo articolo è dare una esposizione il più possibile elementare ed una illustrazione geometrica dei procedimenti per la risoluzione dell'equazione generale di 5° grado mediante funzioni ellittiche.

È noto che tra i grandi progressi compiuti dalla matematica verso la metà del Sec. XIX va annoverata la dimostrazione del Teorema comunemente ricordato sotto i nomi di RUFFINI-ABEL, Teorema che nega la possibilità di risolvere mediante radicali la equazione algebrica generale di grado superiore a quattro. Tale Teorema ha il suo fondamento nella proposizione della Teoria dei Gruppi di sostituzioni che afferma essere semplice il gruppo alterno delle sostituzioni operanti su elementi in numero maggiore di quattro.

Il Teorema di RUFFINI-ABEL da una parte concludeva il ciclo — ormai secolare — dei tentativi tendenti a trovare la espressione delle radici dell'equazione generale di grado superiore al 4° mediante funzioni di un determinato tipo (radicali) aventi per argomenti i coefficienti dell'equazione stessa; d'altra parte apriva la serie delle ricerche tendenti ad ottenere la espressione delle radici mediante determinate classi di funzioni trascendenti.

La risoluzione dell'equazione generale di 5° grado mediante funzioni ellittiche fu uno dei più brillanti risultati in questo ordine di ricerche e mise a profitto i contributi di teorie matematiche che erano fra le più avanzate dell'epoca: la teoria delle funzioni di variabile complessa e la teoria delle equazioni algebriche secondo GALOIS. Si può appunto assegnare come inizio delle ricerche di cui parliamo una affermazione di Galois, il quale asserì che la equazione di 6° grado, scritta da Jacobi per la divisione del periodo delle funzioni ellittiche, ha una risolvente di 5° grado. Tale affermazione fu poi dimostrata dal Betti (nel 1854); in epoca successiva Hermite (1858) ed in un secondo tempo Brioschi e Kroneker costruirono effettivamente le risolventi di 5° grado di quella equazione di 6°, riconoscendo che a tali risolventi possono venir ricondotte le equazioni generali di 5° grado con trasformazioni di Tschirnhaus, le quali a loro volta richiedono la risoluzione di equazioni aventi al massimo grado tre.

La illustrazione geometrica da noi qui data si ricollega ai concetti ed ai procedimenti della Geometria Algebrica che vien detta «classica», e per la sua comprensione dovremo supporre noti al Lettore i concetti fondamentali ed i principali risultati della teoria delle equazioni algebriche secondo Galois (1) e delle funzioni ellittiche (2); avvertiamo inoltre che la nostra illustrazione differisce da quella che F. Klein dà nella sua opera — ormai classica — sulla risoluzione della equazione di 5° grado (3): infatti la nostra illustrazione riguarda prevalentemente il modo di ottenere la equazione di 6° grado di Jacobi, mentre il Klein assume tale equazione come cono-

---

(1) Tra la vastissima letteratura all'argomento ricordiamo i Trattati seguenti:

L. Bianchi, *Lezioni sulla Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, Pisa, (1900).

O. Perron, *Algebra*, Berlino (3ª Ed. 1951).

H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Braunschweig (1898).

B. L. Van der Waerden, *Algebra*, Berlino (1955).

Il Lettore potrà inoltre trovare un cenno elementare di tali teorie nelle opere seguenti:

*Enciclopedia delle Matematiche elementari*, Milano (1930), Vol. I°, Art. XIV (di O. Nicoletti).

*Repertorio di Matematiche*, di M. Villa, Padova (1951), Art. IV (di G. Zappa).

(2) Ricordiamo per es. i seguenti Trattati:

F. Tricomi, *Funzioni ellittiche*, Bologna, (1937).

F. Enriques e O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna (1934), Vol. IV, *Funzioni ellittiche ed abeliane*.

(3) F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig (1884).

sciuta ed interpreta geometricamente la costruzione delle varie risolventi e le ricollega con la equazione icosaedrica.

§ 2. - In tutta la presente trattazione assumeremo come modello di curva ellittica una cubica piana $\Gamma$ priva di punti doppi; tale scelta non importa restrizioni essenziali perchè, come è noto [4], ogni curva di genere uno può essere trasformata in una cubica piana mediante trasformazioni birazionali.

Come è sempre lecito fare, scriveremo la equazione della $\Gamma$ nella forma

$$y^2 = 4x^3 - nx - m \tag{1}$$

e ci limiteremo al caso in cui $m$ ed $n$ sono reali [5]. Indichiamo con $f(x)$ il polinomio di 3° grado

$$f(x) = 4x^3 - nx - m\,;$$

la ipotesi che la (1) sia priva di punti doppi porta come conseguenza che le radici della equazione $f(x) = 0$ siano tutte distinte; le indicheremo secondo l'uso con $e_1$, $e_2$, $e_3$. Indicheremo infine con $\Delta$ la espressione

$$\Delta = n^3 - 27m^2$$

che coincide con il discriminante della equazione $f(x) = 0$ a meno di una costante moltiplicativa.

È noto che i punti — reali e complessi — della $\Gamma$ possono essere rappresentati biunivocamente dai punti di una riemanniana di genere uno, topologicamente equivalente al toro. Come modello di tale riemanniana assumeremo qui una superficie a due fogli sovrapposti, ognuno coincidente con il piano della variabile complessa $x$, uniti tra loro — nel modo solito delle

---

(4) Cfr. per es. ENRIQUES e CHISINI, *Teoria Geometrica ecc.*, Libro V° (Vol. III°), § 7.

(5) La forma in cui abbiamo scritto qui la equazione della cubica $\Gamma$ differisce lievemente da quella in cui essa viene scritta nei trattati classici; infatti nella letteratura si ha costantemente

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

e qui, per comodità di scrittura, abbiamo sostituito $g_2$ e $g_3$ con $n$ ed $m$ rispettivamente.

riemanniane — lungo due tagli distinti; la Fig. 1 illustra il caso particolare in cui si ha $n = 28$, $m = -24$ e quindi $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, $e_3 = -3$; i due fogli sovrapposti sono saldati lungo due segmenti rettilinei: il primo congiungente $e_1$ con $e_2$, il secondo congiungente $e_3$ con l'infinito, lungo la parte negativa dell'asse reale.

Si possono dare sulla riemanniana due cammini chiusi, indipendenti e non nulli che vengono chiamati « cicli »; per es. con riferimento alla Fig. 1 essi sono dati dai due cammini

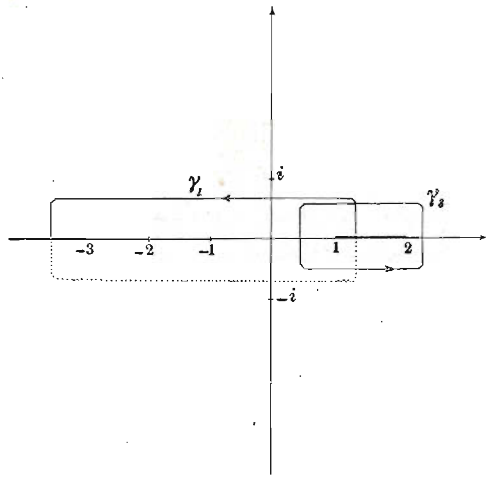


Fig. 1

$\gamma_1$ e $\gamma_3$, il primo abbracciante $e_2$ ed $e_3$ e scorrente in parte sul foglio superiore ed in parte (rappresentata con linea punteggiata) sul foglio inferiore della riemanniana; il secondo scorrente sul foglio superiore ed abbracciante $e_1$ ed $e_2$.

È possibile definire una funzione trascendente, polidroma e regolare in ogni punto della riemanniana di $\Gamma$; tale funzione è l'integrale di una opportuna funzione razionale dei punti di $\Gamma$ e viene chiamata « integrale ellittico di prima specie »; nel caso in esame essa è data da

$$u(P) = \int_Q^P \frac{dx}{y}$$

essendo $Q$ un punto fissato sulla riemanniana ed essendo l'integrale calcolato lungo una linea che congiunge sulla riemanniana stessa $Q$ con $P$. Abitualmente si suole assumere come punto $Q$ origine degli integrali il flesso di $\Gamma$ che coincide con il punto improprio dell'asse delle $y$, e corrisponde quindi al valore infinito della $x$; si pone cioè

$$u(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - nx - m}} \tag{2}$$

Abbiamo detto che la funzione $u$ è polidroma: ciò consegue dal fatto che la riemanniana di $\Gamma$ possiede — come abbiamo visto — dei cicli. Si dànno quindi per la funzione $u$ due « periodi » che coincidono appunto con i valori dell'integrale calcolato lungo tali cicli; i periodi vengono abitualmente indicati con $2\omega$ e $2\omega'$ e si dimostra che il loro rapporto non è reale; questa circostanza si verifica facilmente nell'esempio che abbiamo scelto: inoltre più precisamente indicheremo in tale caso con $2\omega$ il valore dell'integrale lungo il ciclo $\gamma_1$ e con $2\omega'$ il valore dell'integrale calcolato lungo il ciclo $\gamma_3$.

§ **3.** - Consideriamo ora le tre radici: $e_1$, $e_2$, $e_3$ della equazione

$$f(x) = 4x^3 - nx - m = 0. \tag{3}$$

Per semplicità supponiamo che $n$ abbia un valore determinato e non nullo e poniamo invece che $m$ sia variabile (ovviamente nel campo complesso); allora le tre radici della (3) risultano funzioni algebriche della variabile $m$. Se consideriamo il piano $\Pi_m$ di questa variabile complessa, risultano determinati in esso due punti, indici dei valori di $m$ che sono radici della equazione

$$\Delta = n^3 - 27\, m^2 = 0. \tag{4}$$

Fissiamo ora un punto sul piano $\Pi_m$ che sia indice di un valore $m_0$ diverso dalle radici della (4) e facciamo percorrere ad $m$, sempre nello stesso piano, un cammino chiuso che partendo da $m_0$ vi ritorni dopo aver girato attorno a qualche radice della (4); è noto che — considerando sempre le radici della (3) come funzioni di $m$ — si può ottenere che qualunque radice della (3) stessa venga portata in un'altra qualsiasi per prolungamento analitico lungo una curva chiusa opportuna.

I due cammini chiusi fondamentali nel piano $\Pi_m$ sono i due cappi $\lambda'$ e $\lambda''$ che, partendo da $m_0$, allacciano una sola volta in senso positivo i due punti $m'$ ed $m''$ immagini delle radici della (4); il prolungamento analitico lungo uno di tali cappi produce uno scambio tra una coppia di radici della (3) e con gli scambi corrispondenti ai cappi fondamentali $\lambda'$ e $\lambda''$ si genera l'intero gruppo delle sostituzioni sui tre elementi $e_1$, $e_2$, $e_3$.

Per es. nel caso numerico concreto esaminato sopra, fissiamo per $n$ il valore 28 e poniamo che sia $m_0 = -24$; i due valori $m'$ ed $m''$ sono le radici della equazione

$$28^3 - 27m^2 = 0$$

cioè i valori

$$m = \pm 28{,}51 \ldots$$

Come cappi fondamentali possiamo assumere i seguenti: come cappio $\lambda'$ quello che circonda il punto indice del valore $m' = 28{,}51 \ldots$ e come cappio $\lambda''$ quello che circonda il punto indice del valore $m'' = -28{,}51 \ldots$ Posto (per $m_0 = -24$) $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, $e_3 = -3$ si verifica facilmente che il prolungamento analitico lungo il cappio $\lambda'$ provoca lo scambio di $e_2$ con $e_3$ ed il prolungamento analitico lungo $\lambda''$ provoca lo scambio di $e_1$ con $e_2$.

Consideriamo ora i mutamenti che il variare di $m$ provoca sui cicli della riemanniana della cubica $\Gamma$ e quindi sui periodi dell'integrale di prima specie (2). Si verifica (6) che quando $m$ percorre il cappio $\lambda'$, che corrisponde allo scambio di $e_2$ con $e_3$ tra le radici della (3), i cicli subiscono la seguente trasformazione

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 \\ \bar{\gamma}_3 = \gamma_1 + \gamma_3 \end{cases}$$

quando poi $m$ percorre il cappio $\lambda''$ che corrisponde allo scambio di $e_1$ con $e_2$ i cicli di $\Gamma$ subiscono la trasformazione

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 - \gamma_3 \\ \bar{\gamma}_3 = \phantom{\gamma_1 - {}} \gamma_3 \end{cases}$$

(6) Cfr. S. Lefschetz, *L'Analysis situs et la Géométrie algébrique*, Paris, Cap. II, § 2°.

Quindi in corrispondenza ai cappi $\lambda'$ e $\lambda''$ sul piano $\Pi_m$ si hanno per i periodi dell'integrale di prima specie le seguenti sostituzioni

$$T \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega \\ \bar{\omega}' &= \omega + \omega' \end{aligned} \right.$$

$$S \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega - \omega' \\ \bar{\omega}' &= \phantom{\omega -{}} \omega' \end{aligned} \right.$$

Si verifica anche che la sostituzione $U = TST$ è della forma

$$U \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega} &= \phantom{\omega} - \omega' \\ \bar{\omega}' &= \omega \end{aligned} \right.$$

Ora è noto [7] che le sostituzioni $S$ ed $U$ sono le generatrici del cosidetto « Gruppo modulare » cioè le generatrici del gruppo di sostituzioni

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\omega} &= \alpha\omega + \beta\omega' \\ \bar{\omega}' &= \gamma\omega + \delta\omega' \end{aligned} \right. \tag{5}$$

dove $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sono interi, tali che sia $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Possiamo pertanto concludere che quando $m$ percorre una qualunque linea chiusa nel piano complesso i periodi dell'integrale di prima specie relativo alla cubica $\Gamma$ vengono sottoposti alle sostituzioni del gruppo (5).

§ **4.** – È noto che un importante capitolo della teoria delle funzioni di variabile complessa riguarda la classe delle « Funzioni ellittiche ». Esse risultano caratterizzate dal fatto di possedere al finito soltanto singolarità polari e dall'essere doppiamente periodiche. In altre parole una funzione ellittica $F(u)$ è una funzione della variabile complessa $u$ che possiede al finito soltato dei poli e tale che esistono due costanti $K$ e $K'$ soddisfacenti alle relazioni

$$\begin{aligned} F(u + K) &= F(u) \\ F(u + K') &= F(u) \end{aligned} \tag{6}$$

[7] Cfr. per es. G. Vivanti, *Funzioni poliedriche e modulari*, Milano (1906), Parte I°, § 87 e seg.

Si dimostra che le due costanti $K$ e $K'$ non possono avere rapporto reale; ciò significa che sul piano $\Pi_u$ della variabile complessa $u$ i due punti indici dei valori $K$ e $K'$ non possono essere allineati col punto zero. Risulta pertanto determinato nel piano $\Pi_u$ un parallelogramma, avente come lati contigui i due vettori che congiungono il punto zero con i due punti immagini dei valori $K$ e $K'$. Tale piano può venire diviso in parallelogrammi tutti uguali al precedente e che si ottengono da quello mediante traslazioni caratterizzate dai vettori $K$ o $K'$, in numero finito.

In forza delle relazioni (6), se la funzione assume un certo valore in un punto $u$ che stia nel primo parallelogramma, assume pure lo stesso valore in ogni punto $u'$ dato da

$$u' = u + rK + sK'$$

con $r$, $s$ interi relativi qualunque. Pertanto il comportamento della $F$ nell'intero piano $\Pi_u$ può essere desunto dal comportamento nel parallelogramma sopra citato; per questa ragione tale parallelogramma viene chiamato « parallelogramma fondamentale » per la funzione $F$.

Si dimostra che si può costruire una funzione ellittica il cui parallelogramma fondamentale è stato assunto ad arbitrio; inoltre è possibile sostituire un parallelogramma fondamentale dato, avente un vertice nello zero e due vertici opposti nei punti $K$ e $K'$, con un altro i cui vertici opposti $\bar{K}$ e $\bar{K}'$ si ottengono dai precedenti mediante una sostituzione unimodulare

$$\begin{cases} \bar{K} = \alpha K + \beta K' \\ \bar{K}' = \gamma K + \delta K' \end{cases}$$

con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ interi e tali che sia $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

§ 5. - Ciò che abbiamo ricordato nel precedente paragrafo si applica immediatamente all'integrale di prima specie relativo alla cubica di genere uno. Infatti (riferendoci, per semplicità, al modello di cubica già considerato) si è visto che in ogni punto della $\Gamma$ è definito un valore dell'integrale $u$, a meno di periodi; e viceversa si può dimostrare che in punti diversi della cubica l'integrale assume valori diversi ([8]).

---

([8]) Cfr. per es. ENRIQUES e CHISINI, Op. cit. in ([2]), Cap. I, § 9.

In base a questa premessa, si giunge a dimostrare che le coordinate di un punto $P$ della $\Gamma$ si possono esprimere come funzioni doppiamente periodiche del parametro $u$, con i periodi $2\omega$ e $2\omega'$.

In relazione alla cubica $\Gamma$ e con notazioni ormai classiche, si indica con $\wp(u)$ la funzione doppiamente periodica che dà la $x$ di un punto di $\Gamma$ in funzione di $u$, cioè si pone

$$x = \wp(u) \tag{7}$$

e, in conseguenza della (2)

$$y = \frac{dx}{du} = \wp'(u) \tag{8}$$

Pertanto la equazione della cubica (1) si traduce in una classica equazione differenziale per la funzione $\wp(u)$

$$[\wp'(u)]^2 = 4\wp^3(u) - n\wp(u) - m. \tag{9}$$

§ 6. - La teoria dell'integrale ellittico di prima specie relativo alla cubica $\Gamma$ rientra come caso particolare in una teoria ben più generale: la teoria degli integrali di funzioni razionali dei punti di una curva algebrica, o « integrali abeliani » ; questa teoria annovera tra i suoi risultati fondamentali un famoso Teorema di ABEL, che assegna le condizioni perchè un gruppo di punti appartenenti ad una curva data siano intersezioni di questa con un'altra curva, pure algebrica.

In particolare nel caso della $\Gamma$ ed in relazione all'integrale di prima specie dato dalla (2) tale Teorema di ABEL si enuncia:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè tre punti « $P_1$, $P_2$, $P_3$ della cubica $\Gamma$ siano allineati è che tra i corri- « spondenti valori $u_1$, $u_2$, $u_3$ presi in essi dall'integrale ellittico « di prima specie sussista la relazione

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\omega,\ 2\omega'). \tag{10}$$

In particolare quindi, poichè al punto improprio della $\Gamma$ corrisponde — come si è detto — il valore $u = 0$, la condizione perchè due punti $Q_1$, $Q_2$ stiano sopra una stessa retta di equazione $x = \text{cost.}$ è che si abbia

$$u_1 + u_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\omega,\ 2\omega').$$

Scende di qui che la funzione $x = \wp(u)$ è una funzione pari di $u$, cioè che si ha

$$\wp(u) = \wp(-u) . \tag{11}$$

Tra le altre numerose conseguenze che si possono trarre dal Teorema di Abel, vogliamo qui ricordarne due, che avranno per noi particolare interesse nel seguito.

La prima riguarda la condizione necessaria e sufficiente perchè sei punti della $\Gamma$ appartengano ad una stessa conica; essa si esprime con la relazione

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\omega,\ 2\omega') \tag{12}$$

che lega i corrispondenti valori dell'integrale di prima specie.

La seconda è conosciuta sotto il nome di « Teorema di addizione delle funzioni ellittiche » e permette di trovare con operazioni razionali il valore di $\wp(u_1 + u_2)$ quanto si conoscano i valori presi dalle funzioni $\wp$ e $\wp'$ per $u_1$ ed $u_2$.

Per dimostrarlo consideriamo tre punti $P_1$, $P_2$, $P_3$ della $\Gamma$ che stiano su una stessa retta e sia

$$y = px + q \tag{13}$$

la equazione di questa.

Indichiamo con $x_1$, $y_1$ le coordinate di $P_1$ ed analogamente con $x_2$, $y_2$ e con $x_3$, $y_3$ le coordinate di $P_2$ e $P_3$. La equazione risultante dalla eliminazione di $y$ tra la equazione (1) della cubica $\Gamma$ e la equazione (13) della retta su cui stanno i tre punti è

$$(px + q)^2 = 4x^3 - nx - m$$

e pertanto fra le radici sussiste la relazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = p^2/4 . \tag{14}$$

Ma per il significato geometrico che ha il parametro $p$ nella (13) si deduce

$$p = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

e quindi per le (7), (8)

$$p=\frac{\wp'(u_2)-\wp'(u_1)}{\wp(u_2)-\wp(u_1)}\ [9].$$

Sostituendo nella equazione (14) e tenendo conto della relazione (10) che esprime il Teorema di ABEL e della proprietà espressa dalla (11) si ha infine la relazione cercata, che esprime il Teorema di Addizione:

$$(15)\qquad \wp(u_1+u_2)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u_2)-\wp'(u_1)}{\wp(u_2)-\wp(u_1)}\right]^2-\wp(u_1)-\wp(u_2)\,.$$

Questa relazione può essere scritta anche nel caso particolare in cui la retta (13) sia tangente alla $\Gamma$ in $P_1$ e quindi si abbia $u_2=u_1$; infatti in tal caso il parametro $p$ della retta (13) vale ovviamente:

$$p=\left|\frac{dy}{dx}\right|_{u=u_1}=\frac{\wp''(u_1)}{\wp'(u_1)}$$

ma dalla (9) derivando si ha

$$2\wp'\wp''=12\wp'\wp^2-n\wp'$$

e quindi

$$2\frac{\wp''}{\wp'}=\frac{12\wp^2-n}{\wp'};$$

eseguendo il quadrato ed ancora tenendo conto della (9) si ottiene infine:

$$4\left[\frac{\wp''}{\wp'}\right]^2=\frac{(12\wp^2-n)^2}{4\wp^3-n\wp-m}$$

e pertanto si ha dalla (15) in particolare la

$$(16)\qquad \wp(2u)=\frac{1}{16}\,\frac{[12\wp^2(u)-n]^2}{4\wp^3(u)-n\wp(u)-m}-2\wp(u)$$

che viene comunemente chiamata « Equazione della duplicazione dell' argomento »

---

[9] Secondo l'uso, conveniamo di indicare brevemente con $\wp'(u_1)$ e $\wp'(u_2)$ i valori che la funzione $\wp'$ assume per $u=u_1$ ed $u=u_2$ rispettivamente.

§ 7. - Richiamati così brevemente i principi fondamentali della Teoria delle Funzioni Ellittiche, possiamo enunciare ora un problema geometrico che ci porterà alla scrittura di una equazione di 6° grado la cui soluzione si riconduce alla soluzione di un' equazione generale di 5° grado.

Ovviamente molti sono i problemi geometrici cosiffatti, che potrebbero condurre allo scopo con procedimenti di notevole eleganza; ne abbiamo scelto uno per il quale non occorrono considerazioni di Geometria iperspaziale e che permette di seguire il procedimento per quanto è possibile rimanendo legati al piano della cubica Γ. Si tratta del problema seguente: « Determinare le coniche passanti per un flesso della Γ ed « aventi altrove con questa un contatto 5-punto. »

Scelto come flesso il punto improprio di Γ, il problema si riconduce a trovare i punti di contatto 5-punto al finito di Γ con le coniche

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{17}$$

La scrittura diretta delle relazioni algebriche tra i parametri $a_{ik}$ delle coniche (17) che traducono le condizioni geometriche imposte conduce a dei calcoli di notevole complicazione.

Si giunge invece facilmente allo scopo sfruttando i Teoremi che abbiamo ricordato relativi agli integrali ellittici ed alle funzioni ellittiche. Ricordiamo infatti la relazione (12) che lega i parametri di sei punti di Γ appartenenti ad una stessa conica; tenuto conto del fatto che il flesso per cui la conica deve passare corrisponde al valore $u = 0$ e del fatto che gli altri cinque valori del parametro devono coincidere, siamo dunque condotti a scrivere la relazione

$$5u \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\omega,\ 2\omega') \tag{18}$$

a cui devono soddisfare i valori del parametro $u$ nei punti di contatto cercati. I valori di $u$ che soddisfano alla (18) sono dati da

$$u = (2r\omega + 2s\omega')/5 \tag{19}$$

con $r$, $s$ interi qualunque. Ovviamente, in forza della periodicità delle funzioni ellittiche, si avranno valori distinti di $\wp(u)$ soltanto in corrispondenza a valori di $r$ ed $s$ compresi tra zero e 4 (estremi inclusi) con esclusione della coppia $r = s = 0$ cui corrisponde il flesso improprio di $\Gamma$.

Rimangono pertanto da prendersi in considerazione 24 valori di $u$, valori che raggruppiamo nella seguente tabella

(20)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\infty$ | $2\omega/5$ | $4\omega/5$ | $6\omega/5$ | $8\omega/5$ |
| 0 | $2\omega'/5$ | $4\omega'/5$ | $6\omega'/5$ | $8\omega'/5$ |
| 1 | $\frac{2\omega + 2\omega'}{5}$ | $\frac{4\omega + 4\omega'}{5}$ | $\frac{6\omega + 6\omega'}{5}$ | $\frac{8\omega + 8\omega'}{5}$ |
| 2 | $\frac{4\omega + 2\omega'}{5}$ | $\frac{8\omega + 4\omega'}{5}$ | $\frac{2\omega + 6\omega'}{5}$ | $\frac{6\omega + 8\omega'}{5}$ |
| 3 | $\frac{6\omega + 2\omega'}{5}$ | $\frac{2\omega + 4\omega'}{5}$ | $\frac{8\omega + 6\omega'}{5}$ | $\frac{4\omega + 8\omega'}{5}$ |
| 4 | $\frac{8\omega + 2\omega'}{5}$ | $\frac{6\omega + 4\omega'}{5}$ | $\frac{4\omega + 6\omega'}{5}$ | $\frac{2\omega + 8\omega'}{5}$ |

Si osservi che le singole righe della tabella sono contrassegnate degli indici $\infty$, 0, 1, 2, 3, 4 rispettivamente, indici che si riferiscono ovviamente al rapporto $r/s$ (ridotto rispetto al modulo 5) che compete ai valori di $u$ forniti dalla (19) appartenenti ad ogni riga; in ogni singola riga poi i valori che compaiono nella 2ª, 3ª, 4ª colonna sono rispettivamente il doppio, il triplo, il quadruplo del valore che compare nella prima (sempre a meno di multipli dei periodi $2\omega$, $2\omega'$).

Si vede poi facilmente che, considerata una riga qualunque della tabella (20), la funzione $\wp(u)$ assume lo stesso valore quando si dànno ad $u$ i valori che compaiono nella prima e quarta colonna, oppure quando si dànno ad $u$ i valori che compaiono nella seconda e terza colonna, e ciò in forza della relazione (11).

Si può pertanto concludere che ad ogni riga della tabella (20) corrisponde una conica degenere, avente equazione

$$x^2 - \xi x + \eta = 0 \tag{21}$$

la quale contiene tutti e quattro i punti della cubica $\Gamma$ che corrispondono ai valori di $u$ appartenenti alla riga stessa.

Inoltre, conosciuto il valore di $\wp(u)$ che viene assunto in corrispondenza ad uno dei valori appartenenti alla tabella (20), si possono ottenere razionalmente i valori che $\wp(u)$ assume in corrispondenza ai valori di $u$ che stanno sulla stessa riga della tabella. Ricordiamo infatti che le quattro prime potenze di 2 danno resti incongrui rispetto al modulo 5, e precisamente i resti 2, 4, 3, 1; quindi partendo da un valore di $u$ che stia nella tabella (20), mediante tre successivi raddoppiamenti si possono ottenere (a meno di multipli dei periodi) i valori che stanno negli altri tre posti della stessa riga. Di conseguenza in forza della relazione (16), conosciuto il valore di $\wp(u)$ che corrisponde ad un valore appartenente alla tabella (20), i valori di $\wp(u)$ che corrispondono a valori di $u$ appartenenti alla stessa riga si ottengono razionalmente dal primo.

A titolo di esempio svolgeremo il calcolo in relazione ai valori di $u$ che compaiono nella prima riga. Poniamo per brevità:

$$A = \wp(2\omega/5) = \wp(8\omega/5)$$

$$B = \wp(4\omega/5) = \wp(6\omega/5).$$

Si ha allora chiaramente che $A$ e $B$ sono legati dalle formule di duplicazione (16); precisamente sussistono le due relazioni

$$B = \frac{1}{16}\frac{(12A^2 - n)^2}{4A^3 - nA - m} - 2A \tag{22}$$

$$A = \frac{1}{16}\frac{(12B^2 - n)^2}{4B^3 - nB - m} - 2B. \tag{23}$$

Poichè i quattro punti di $\Gamma$ corrispondenti ai quattro valori della prima riga della (20) stanno su di una stessa conica degenere (21) si ha

$$\left\{\begin{aligned} A + B &= \xi \\ AB &= \eta. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Sommando le due equazioni (22) e (23) e tenendo conto delle (24) si ottiene

$$128\xi^2\eta - 160\eta^2 - 16n\eta = 16\xi^4 + 8n\xi^2 + 48m\xi + 2n^2 \tag{26}$$

sottraendo poi la (23) dalla (22) e sopprimendo il fattore $(A - B)$, sempre tenendo conto delle (24) si ha

$$6\xi\eta = \xi^3 + n\xi/2 + \eta. \tag{26}$$

Infine sottraendo dalla (25) la (26) moltiplicata per $48\eta$ si ottiene

$$5\eta^2 + 5\xi^2 n + n\eta/2 - \xi^4 - n\xi^2/2 + \eta^2/16 = 0. \tag{27}$$

Interpretiamo ora $\xi$ ed $\eta$ come coordinate cartesiane di punto in un piano ausiliario $\pi$; in forza di ciò che è stato detto fin qui, ad ogni riga della tabella (20) corrisponde una conica degenere (21) e quindi un punto di $\pi$. La ricerca delle sei coniche degeneri (21) corrispondenti alle sei righe della tabella (20) si traduce nella ricerca delle intersezioni al finito della cubica (26) con la quartica (27), intersezioni che risultano essere precisamente in numero di sei a causa del comportamento che le curve hanno nel punto improprio dell'asse delle $\eta$.

Pertanto potremo scrivere una equazione di 6° grado le cui radici corrispondono alle sei intersezioni delle due curve suddette; rimane tuttavia da stabilire come si comportino le sei intersezioni della cubica (26) con la quartica (27) al variare dei due parametri $n$ ed $m$ che compaiono nelle loro equazioni, il che ci permetterà di determinare il gruppo di monodromia delle radici della equazione di 6° grado che scriveremo, in funzione dei parametri suddetti.

§ 8. - Come abbiamo già fatto (§ 3), poniamo che nelle equazioni (26) e (27) il parametro $n$ sia fisso e varii soltanto il parametro $m$, nel piano della variabile complessa $\Pi_m$. Abbiamo già visto in qual modo cambino i periodi dell'integrale ellittico $u$ relativo alla cubica $\Gamma$ quando $m$ descrive nel piano $\Pi_m$ un ciclo chiuso; tali cambiamenti avvengono secondo le sostituzioni di un gruppo che si può ritenere generato dalle seguenti operazioni elementari:

$$S \equiv \begin{cases} \overline{\omega} = \omega \\ \overline{\omega}' = \omega + \omega' \end{cases} \qquad U \equiv \begin{cases} \overline{\omega} = \ -\omega' \\ \overline{\omega}' = \omega. \end{cases}$$

Ora si verifica facilmente che in corrispondenza alle sostituzioni $S$ ed $U$ tra i periodi, le righe della tabella (20) vengono permutate fra loro; precisamente, indicato con $\nu$ l'indice della riga nella tabella (20), si verifica che alle sostituzioni $S$ ed $U$ tra i periodi corrispondono due sostituzioni tra gli indici delle righe, sostituzioni che indicheremo ancora con i simboli $S$ ed $U$:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &S)\quad \nu' \equiv \nu + 1 \qquad &(\text{mod. } 5)\\ &U)\quad \nu\nu' \equiv -1 \qquad &(\text{mod. } 5). \end{aligned}$$

Queste formule vanno intese in senso convenzionale per quanto riguarda l'indice $\nu = \infty$; precisamente si conviene che la $U$ scambi tra loro gli indici zero ed $\infty$ e che la $S$ lasci fermo l'indice $\infty$.

Il gruppo di sostituzioni tra le righe della tabella (20) generato dalle operazioni (28) è un gruppo ben noto ([10]); esso viene chiamato gruppo « icosaedrico » perchè è isomorfo al gruppo dei 60 movimenti rigidi che mutano in sè un icosaedro regolare.

Ora si verifica facilmente che la operazione $U$ determina tra le righe della tabella (20) la sostituzione involutoria

$$U = (\infty\, 0)(14)$$

ed analogamente si vede che le successive trasformate della $U$ con le potenze della $S$ determinano le sostituzioni, tutte involutorie

$$\begin{aligned} U_1 &= S^{-1}U \quad S \;\; = (\infty\, 1)(20)\\ U_2 &= S^{-2}U \quad S^2 = (\infty\, 2)(31)\\ U_3 &= S^{-3}U \quad S^3 = (\infty\, 3)(42)\\ U_4 &= S^{-4}U \quad S^4 = (\infty\, 4)(03). \end{aligned}$$

Indichiamo ora con $P_\infty$, $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ i sei punti che sono le intersezioni al finito della cubica (26) con la quartica (27); essi possono venire accoppiati tra loro in $15 = \binom{6}{2}$ modi diversi. Ora in base a ciò che abbiamo detto fin qui, le coppie possono essere raggruppate in 5 diverse terne di coppie, ogni terna essendo univocamente determinata da una delle coppie

---

([10]) Cfr. per es. KLEIN, Op. cit. in ([3]), VIVANTI, Op. cit. in ([7]), BIANCHI, Op. cit. in ([1]).

che la compongono: tali terne sono date dalla tabella seguente:

$$(29)\qquad \begin{array}{c|ccc} \tau_0 & P_\infty P_0 & P_1 P_4 & P_2 P_3 \\ \tau_1 & P_\infty P_1 & P_2 P_0 & P_3 P_4 \\ \tau_2 & P_\infty P_2 & P_3 P_1 & P_4 P_0 \\ \tau_3 & P_\infty P_3 & P_4 P_2 & P_0 P_1 \\ \tau_4 & P_\infty P_4 & P_0 P_3 & P_1 P_2 . \end{array}$$

Ora si verifica che le sostituzioni (28) operanti sulle righe della tabella (20) corrispondono a certe sostituzioni tra le cinque righe della tabella (29); tali sostituzioni sono le seguenti

$$(30)\qquad \begin{cases} S^* = (01234) \\ U^* = (12)(34). \end{cases}$$

Ora le sostituzioni (30) generano l'intero gruppo alterno fra cinque elementi, gruppo che è isomorfo al gruppo di Galois della equazione generale di 5° grado ([11]).

Quindi in forza della Teoria delle Equazioni la risoluzione di una equazione che dia le cinque terne $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, $\tau_4$ può essere equivalente alla risoluzione della equazione generale di 5° grado.

Nel paragrafo successivo daremo un cenno dei calcoli che conducono a scrivere una equazione di 5° grado le cui radici corrispondono alle righe della tabella (29).

§ 9. – Abbiamo visto nei precedenti paragrafi che il problema geometrico da cui siamo partiti è stato ricondotto al trovare le intersezioni della cubica (26) e della quartica (27). La eliminazione di una delle variabili tra quelle due equazioni condurrebbe immediatamente alla scrittura di una equazione di 6° grado birazionalmente identica alla equazione di Jacobi della divisione per 5 del periodo delle funzioni ellittiche.

Tuttavia qualora si voglia ottenere esattamente tale equazione conviene operare nel piano $\pi$ (su cui sono coordinate cartesiane $\xi$ ed $\eta$) la trasformazione di De Jonquières

$$\begin{cases} Y = \xi^2 - 4\eta \\ X = \xi \end{cases}$$

---

([11]) Si vedano per es. le opere citate in ([1]).

in tal modo dalle equazioni (26) e (27) si ottengono rispettivamente le equazioni

$$3XY = X^3 - nX - 2m \tag{31}$$

$$4Y(9X^2 - Y) = (3X^2 - n + Y)^2 . \tag{32}$$

Con facili trasformazioni poi si può sostituire al sistema delle due equazioni precedenti il sistema

$$3(Y - n)X^2 - 18mX - (Y - n)^2 - 4Y^2 = 0 \tag{31'}$$

$$3m(Y - n) - 9mX^2 + 2X(Y^2 - nY + n^2) = 0 . \tag{32'}$$

Queste due equazioni rappresentano due cubiche nel piano in cui sono coordinate cartesiane $X$ ed $Y$. Tali cubiche hanno in comune i punti impropri degli assi ed inoltre il punto al finito di coordinate

$$X = -2n^2/9m \qquad Y = n ,$$

La eliminazione di $X$ tra le due equazioni precedenti conduce quindi alla equazione

$$(Y - n)(5Y^6 - 12nY^5 + 10\Delta Y^3 + \Delta^2) = 0 \tag{33}$$

essendo $\Delta = n^3 - 27m^2$ la espressione già definita sopra, nel § 2. Pertanto la ricerca di quelle intersezioni tra le due cubiche suddette che sono variabili in funzione di $m$ è ricondotta alla soluzione della equazione che si ottiene uguagliando a zero il secondo fattore che compare al primo membro della (33). Tale equazione ponendo $Y = -1/v$ viene abitualmente scritta nella forma seguente:

$$v^6 + \frac{10}{\Delta} v^3 - \frac{12n}{\Delta^2} v + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

e coincide con la equazione scritta dal JACOBI per la divisione per 5 del periodo delle funzioni ellittiche.

La forma abituale in cui la equazione di JACOBI si trova riportata nei trattati è la seguente

$$v^6 - 10av^3 - bv + 5a^2 = 0 \tag{34}$$

alla quale si riconduce la precedente purchè si ponga

$$\Delta = -1/a ; \; n = b/12a^2 : \; m = \sqrt{\frac{n^3 - \Delta}{27}} = \frac{\sqrt{b^3 + 1728a^5}}{216a^3} . \tag{35}$$

Indichiamo ora con $v_\infty$, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ le radici della equazione (34); esse si scambiano tra loro — al variare di $m$ nel piano della variabile complessa — con le stesse leggi dei sei punti $P_\infty$, $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ intersezioni della cubica (26) e della quartica (27). Pertanto si possono formare con tali sei radici delle funzioni che — al variare di $m$ — assumono soltanto 5 valori distinti; ciò si ottiene associando le radici della (34) a terne di coppie, in modo analogo a quello dei punti della tabella (29). Le funzioni che si possono formare sono per es. le seguenti:

$$z = v_\infty v_0 + v_1 v_4 + v_2 v_3 \tag{36}$$

e le altre quattro che si ottengono ordinando gli indici in modo analogo alla tabella (29); oppure

$$\varphi = (v_\infty + v_0)(v_1 + v_4)(v_2 + v_3)$$

e le altre quattro, oppure

$$\psi = [(v_\infty - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)]^2 \tag{37}$$

e le altre quattro.

La ricerca delle funzioni simmetriche elementari dei cinque valori della funzione $z$ data dalla (36) oppure delle funzioni $\varphi$ e $\psi$ non presenta difficoltà concettuali: in base a noti risultati della Teoria delle Equazioni i coefficienti della equazione di 5° grado che ha come radici i valori della funzione $z$ (oppure della $\varphi$ o della $\psi$) sono funzioni razionali dei coefficienti della equazione di Jacobi (34).

Il calcolo effettivo risulta tuttavia notevolmente complicato, se non eseguito con opportuni accorgimenti; varii Autori — tra cui Hermite, Brioschi e Kroneker che abbiamo citati nel § 1 — hanno escogitato dei procedimenti per giungere alla scrittura effettiva della equazione di 5° grado. La descrizione di tali procedimenti e la valutazione comparativa dei loro pregi e vantaggi esula dalla natura illustrativa di questo Articolo e trova posto più opportunamente nei Trattati specializzati [12]. Ci limitiamo qui ad annunciare che, scegliendo

---

[12] Si vedano per es. i Trattati citati in [1] ed in [3] oppure la Appendice della traduzione italiana del *Trattato delle Funzioni Ellittiche* di A. Cayley (Milano 1880).

la funzione $z$ data dalla (36) si giunge a scrivere la equazione

$$(38) \qquad z^5 - 320a^2z^2 + 80abz - 32b^2 = 0.$$

Scegliendo invece la funzione $\psi$ data dalla (37) si può giungere alla equazione

$$(39) \qquad t^5 - 10at^2 + 45a^2t + k = 0$$

dove $k$ è legato ad $a$ e $b$ dalla relazione

$$b^3 + 1728\ a^5 = k^2.$$

Ora in base a ciò che è stato ricordato sopra (alla fine del § 8) il gruppo di Galois della equazione (38) o della (39) è il gruppo alterno su cinque elementi epperò tali equazioni sono equivalenti alla equazione generale di 5° grado. Ciò si può anche verificare direttamente: per es. la (39) per $a = 1$ dà la cosidetta « Forma normale di Brioschi » a cui si può ricondurre la equazione generale di 5° grado mediante trasformazioni di Tschirnhaus i cui coefficienti per esser determinati richiedono la risoluzione di equazioni di grado non superiore al secondo.

Appare ora evidente come da ciò che abbiamo esposto fin qui possa trarsi un procedimento per la risoluzione della equazione generale di 5° grado mediante funzioni ellittiche. Infatti si può per es. anzitutto ridurre la equazione data alla forma normale di Brioschi: allora le (35) forniscono direttamente i coefficienti della cubica $\Gamma$ e si ha quindi la possibilità di calcolare i periodi dell'integrale $u$. Di conseguenza si ha la possibilità di calcolare i valori della tabella (20) e quindi le radici della equazione di Jacobi (34). Da tali radici, con i procedimenti esposti, si ottengono i valori della funzione $\psi$ e quindi (con trasformazioni razionali che non stiamo per brevità a ricordare) le radici della equazione data.